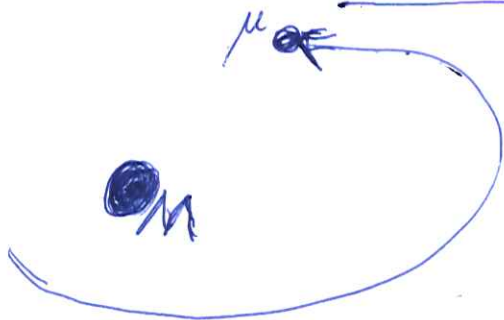


Dynamik in starken Gravitationsfeldern

besitzt: Newton'sche Dynamik, langsame Bewegung & schwaches G-feld

starke G-felder: - numerische Simulationen

- Testmasse in Raumzeit eines schweren schwarzen Loches



$\mu \ll M$

Schwarzschild ~~Linne~~-Metrik:

$$dx^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Symmetrien & Erhaltungsgrößen

Metrik $g_{\mu\nu}$ unabhängig von $t \rightarrow$ Symmetrie

$e_t^\mu \partial_\mu g_{\nu\rho} = 0$ mit $(e_t^\mu) = (1, 0, 0, 0)$ (*)

Koordinatenunabhängige Variante:

Versuch: $\nabla_\mu e_t^\nu = \frac{\partial e_t^\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\rho\mu}^\nu e_t^\rho$

$= \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\rho g_{\mu\sigma} + \partial_\mu g_{\rho\sigma} - \partial_\sigma g_{\rho\mu}) e_t^\sigma$

fällt weg, wenn man in μ, σ symmetriert

$\nabla_{\mu} e_t^\nu = 0$

Killing-Gleichung $\hat{=}$ Bedingung für Symmetrie

e_t^μ : Killing-Vektor

für (*): $\nabla_{\mu} e_t^\nu = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \partial_\rho g_{\mu\nu} = 0$ ✓

Mit Lie-Ableitung \mathcal{L}_{e_t}

$\mathcal{L}_{e_t} g_{\mu\nu} = e_t^\rho \nabla_\rho g_{\mu\nu} + (\nabla_\mu e_t^\rho) g_{\rho\nu} + (\nabla_\nu e_t^\rho) g_{\mu\rho}$

$= \nabla_\mu e_t^\nu + \nabla_\nu e_t^\mu$

$\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$

$\mathcal{L}_{e_t} g_{\mu\nu} = 0 \iff \nabla_{\mu} e_t^\nu = 0$

Erhaltungsgrößen

$E_t = e_t^\mu u^\mu, \quad \frac{D u^\mu}{D\tau} = u^\nu \nabla_\nu u^\mu = 0$

u^μ : 4-Geschwindigkeit

(Paralleltransport von u^μ entlang sich selbst)

$\frac{D E_t}{D\tau} = u^\nu \nabla_\nu (e_t^\mu u^\mu) = \underbrace{u^\nu e_t^\mu \nabla_\nu u^\mu}_0 + u^\mu u^\nu \nabla_\nu e_t^\mu$

$= u^\mu u^\nu \nabla_{(\nu} e_t^{\mu)} = 0 \iff E_t = \text{const} \wedge$ Erhaltungsgröße

Energieerhaltung: $(\xi^\mu) = (1, 0, 0, 0)$ ist Killing-Vektor

$\rightarrow E = -u_\mu \xi^\mu = -u_0$

mit: ~~4~~ 4-Impuls $p_\nu = \mu \cdot u_\nu$

Energie: $-p_0$ Impuls: p_i

$\rightarrow E = -\frac{p_0}{\mu} = \frac{\text{Energie}}{\text{Masse } \mu}$ ~~ist~~ ^{bleibt} erhalten

Drehimpulserhaltung:

$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \phi} = 0 \rightarrow (\xi^\mu) = (0, 0, 0, 1)$ ist Killing-Vektor

Drehimpuls: $L = u_\mu \xi^\mu = u_3 = \frac{p_3}{\mu} = \frac{\text{Drehimpuls}}{\text{Masse } \mu}$

~~ist~~ bleibt erhalten

Anmerkung: Metrik ist ~~keine~~ Kugelsymmetrisch

\rightarrow Drehimpuls ist in jeder Richtung const.

\rightarrow Bewegung findet in einer Ebene statt

O.B.d.A. $\Theta = \frac{\pi}{2}, u_2 = 0 \rightarrow u_3 = |\vec{L}| = L$

effektives Potential:

$g^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = -1$

$\rightarrow 0 = -\frac{u_0^2}{1-2M/r} + u_1^2(1-2M/r) + \frac{u_3^2}{r^2} + 1$

$u_0 = -E = \text{const}, u_3 = L = \text{const}, u_1 = g_{11} u^1 = (1-2M/r)^{-1} \frac{dr}{dt}$

~~ist~~ $0 = -\frac{E^2}{1-2M/r} + \frac{1}{1-2M/r} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} + 1$

$\rightarrow \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = E^2 - V_r^2$

mit dem effektiven Potential für die Radialbewegung:

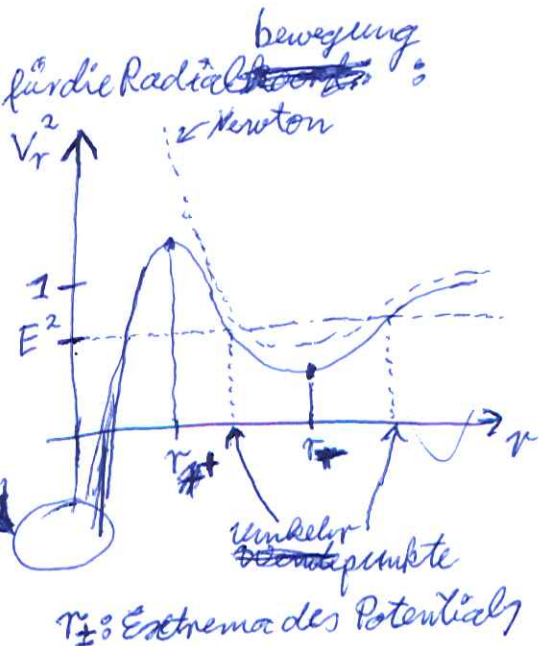
$V_r^2 = \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$

klein für $r \rightarrow 2M$

\rightarrow "Grube" im Potential!

~~Wendepunkte~~ ~~keine~~

$\frac{dr}{dt} = 0$
keine Drehimpulsbarriere wie im Newtonschen Fall!



~~Wendepunkte~~ Umkehrpunkte:

$$\frac{dr}{dt} = 0 \quad \wedge \quad V_r = E$$

Falls Kreisbahn $r = \text{const}$: im Minimum des Potentials (~~ER~~) ($r = r_{\pm}$)

Extrema r_{\pm} :

$$\frac{dV_r^2}{dr} = 0$$

$$-\frac{2L^2}{r^3} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) + \frac{2M}{r^2} \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) = 0 \quad (*)$$



$$\circ \left(+\frac{r^2}{2M}\right): 0 = 1 - \frac{L^2}{M r} \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{M}{r}\right) \quad (**)$$

$$\circ \frac{1}{3L^2}: 0 = r^{-2} - \frac{1}{3M} r^{-1} + \frac{1}{3L^2}$$

$$\wedge r_{\pm}^{-1} = \frac{1}{6M} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{6M}\right)^2 - \frac{1}{3L^2}}$$

$$\text{oder: } \frac{6M}{r_{\pm}} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{12M^2}{L^2}}$$

r_{+} : Maximum von V_r & instabile Kreisbahn

r_{-} : Minimum von V_r & stabile "

für $L^2 < 12M^2$ keine Lösung (ER)

Keine Kreisbahn möglich

"letzte" Kreisbahn bei $L^2 = 12M^2$ bzw. $L = 2\sqrt{3}M$

wird irgendwo durch GW-Abstrahlung erreicht
(L nimmt langsam ab)

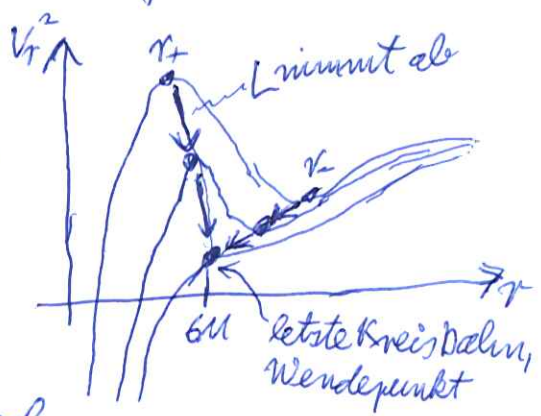
$$\text{dann: } r_{+} = r_{-} = 6M$$

Extrema "verschmelzen" und werden zu einem Wendepunkt

↳ Bewegung wird instabil

~~Teilchen wird ins schwarze Loch gezogen~~

↳ Teilchen stürzt ins schwarze Loch (engl.: plunge)



~~Wahlring~~

ab jetzt: Kreisbahnen, $u^1 = 0 = u^2$

Unterschied im Uhrentgang dt vs $d\tau$

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = (u^0)^2$$

← aus $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1, u^1 = 0$
 $\hookrightarrow 0 = -(u^0)^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) + 1 + \frac{L^2}{r^2}$

$$= \frac{1 - \frac{2M}{r} + \frac{L^2}{r^2}}{1 - \frac{2M}{r}} = \frac{1 - \frac{2M}{r}}{1 - \frac{2M}{r}}$$

$$= \frac{Mr}{L^2} \stackrel{r=r_-}{=} \frac{M^2}{6L^2} \left[1 - \sqrt{1 - 12 \frac{M^2}{L^2}}\right]^{-1}$$

Frequenz:

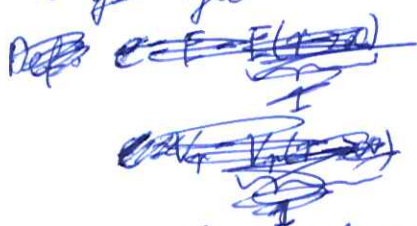
$$\omega^2 = \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = \frac{M}{r^3}$$

$\frac{Mr}{L^2} \quad (u^3)^2 = \left(\frac{L}{r^2}\right)^2$

$\hookrightarrow \boxed{r^3 \omega^2 = M}$ wie im Newtonschen Fall!
 (3. Kepler'sches Gesetz)

bisher

~~Bindungsenergie: Kreisbahn V_r~~



Wird Eichunabhängig, da über \mathcal{E}_W beobachtbar ($\omega_{GW} = 2\omega$)

abgeleitete Eichunabhängige $2/3$ Größe: $x := (M\omega)$

in Schwarzschildkoordinaten: $x = \frac{M}{r}$

als Eichunabh.:

Bindungsenergie $e := V_r - \underbrace{V_r(r \rightarrow \infty)}_1 = V_r - 1$

Relation $e(x)$ ist Eichunabh.

berechnen: $V_r^2 = \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$

$(**) = \frac{M/r}{1 - 3M/r}$

$$= \left(1 + \frac{x}{1-3x}\right) (1-2x) = \frac{(1-2x)^2}{1-3x}$$

$$\hookrightarrow \boxed{e(x) = \frac{1-2x}{1-3x} - 1}$$

fol bei $x = \frac{1}{3}$