

Wirkung auf Lichtausbreitung: $ds^2 = 0$

mit $ds^2 = -dt^2 + (g_{ij} + h_{ij}^{TT}) dx^i dx^j$

vereinfachende Annahmen:

Ausbreitung senkrecht zum Detektor, nur h_+ Polarisation

$h_{ij}^{TT} x$ const auf Zeitskala der Lichtlaufzeit

$ds^2 = 0 \Rightarrow \Delta t^2 = (g_{ij} + h_{ij}^{TT}) \Delta x^i \Delta x^j$

in x-Richtung: $\Delta t_x^2 = (1 + h_+) \Delta x^2, \Delta x = L \cdot 2$

y " : $\Delta t_y^2 = (1 - h_+) \Delta y^2, \Delta y = L \cdot 2$

Phasendifferenz ^{Richtung} ~~am~~ Photodetektor für ~~$L \cdot 2$~~ ~~und~~ $F \approx 1$ (FP ~~vernachlässigen~~, siehe unten)

~~$\Delta \varphi \approx \omega_L (\Delta t_x - \Delta t_y) \approx 2 \omega_L L h_+$~~

ω_L Laserfrequenz

Korrekturfaktor da h_{ij}^{TT} zeitabhängig: $\Delta \varphi \approx 2 \omega_L L h_+ \frac{\sin(\omega_{GW} L)}{\omega_{GW} L} \quad (*1)$

Berücksichtigung der Einense F (für $\omega_{GW} L \ll 1$, gültig für LIGO)

Photonen werden mehrmals zwischen ITM und ETM reflektiert

\hookrightarrow Armlänge vergrößert sich effektiv um Faktor $\frac{2}{\pi} F$ bei FP in Resonanz

~~$\Delta \varphi \approx \frac{4F}{\pi} \omega_L L h_+$~~ $\Delta \varphi \approx \frac{4F}{\pi} \omega_L L h_+ \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_{GW}/\omega_p)^2}}, \omega_p = \frac{\pi}{2F L}$ "pole frequency"

~~$\Delta \varphi \approx \frac{4F}{\pi} \omega_L L h_+$~~

Korrekturfaktor wg. zeitabhängigkeit

~~von~~ h_{ij}^{TT} ; analog suchen.

Entsteht, da das Licht ~~bei~~ nach jeder

Reflektion eine ~~kleine~~ andere Laufzeit

hat und daher nicht ~~stetig~~ in Resonanz bleibt

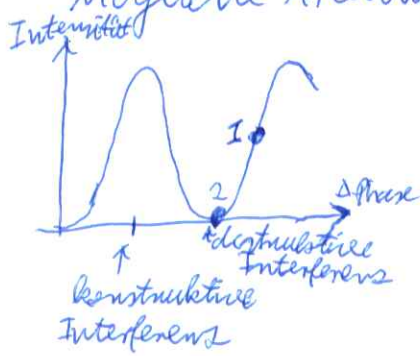
*1 Entsteht durch ~~Mittelung~~ ^{einer} ~~monochromatischen~~ ^{monochromatischen} GW

über die Lichtlaufzeit durch den Arm. kann null werden ∇

Detektor im Lock

des Michelson Interferometers

Mögliche Arbeitspunkte ~~an Photodiode~~:



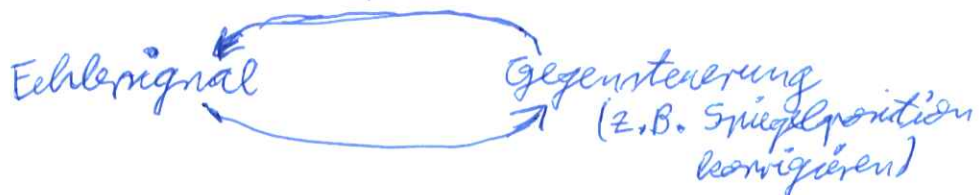
- 1: sensitiv auf Phasendifferenz $\sim \text{GW}$ (gut)
aber empfindlich ~~zu~~ auf Leistungsschwankungen des Lasers (schlecht)
- 2: unempfindlich gegen Leistungsschwankungen
Nullmessung möglich (gut)
aber nicht sensitiv ~~zu~~ auf Phasendifferenz, $\frac{dI}{d\phi} \sim 0$ (schlecht)

Kompromiss: Arbeitspunkt nahe 2, aber nicht exakt
& signal recycling

Detektor im Lock:

- Michelson-Int. am Arbeitspunkt
- FP-Resonatoren in Resonanz
4 Stück: 2 Arme, power recycling, signal recycling
- Frequenzstabilisierung des Lasers auf
symmetrische Änderung der Arme
(asymm. Änderung $\approx \text{GW}$)

Viele feedback control loops halten Detektor im Lock



wichtige Fehler signale durch Frequenzmodulation des Lasers

$$e^{i(\omega_0 t + \Gamma \sin(\Omega t))} \approx e^{i\omega_0 t} + e^{i(\omega_0 + \Omega)t} + e^{i(\omega_0 - \Omega)t}$$

ω_0 : Trägerfrequenz

$\omega_{\pm} = \omega_0 \pm \Omega$ Seitenbänder

- Seitenbänder können ~~mit~~ ^{mit} einlesen (oder gar keinen)
FP-Resonatoren in Resonanz ~~sein~~ gebracht werden
- bei Differenz in den Armlängen ΔL (Schmupp-Asymmetrie)
können ~~die~~ Seitenbänder z.B. am Arbeitspunkt 1 liegen (siehe oben)

mehrere Frequenzmodulationen / Seitenbänder werden verwendet
und an verschiedenen Stellen ausgelesen, um alle Teile im
"Lock" zu halten

$\text{GW} \approx h \nu \sim 10^{-21} \rightarrow$ Phasenänderung $\sim 10^{-8}$ rad
 \rightarrow Quantennatur des Lichtes wichtig
 \rightarrow Rauschen / Unschärfe

Rauschen:

Schrot

Schrotrauschen (shot noise) an der Photodiode

In einem Messintervall T trifft eine diskrete Zahl N_p an Photonen auf Photodiode

\rightarrow Poisson-Verteilung $\xrightarrow{N_p \text{ groß}}$ Gauß-Verteilung mit $\Delta N_p = \sqrt{N_p}$

Laserleistung: $P = \frac{1}{T} N_p h \omega_L$

$\rightarrow \Delta P_{\text{schrot}} = \frac{1}{T} \sqrt{N_p} h \omega_L = \sqrt{\frac{h \omega_L}{T} P}$

Vergleich mit GW: $\Delta P_{\text{GW}} \sim P \cdot \Delta \varphi \sim \frac{F \omega_L L h + P}{\sqrt{1 + (\omega_{\text{GW}}/\omega_p)^2}}$

Signal-Rausch-Verhältnis (SNR):

$\frac{S}{N} = \frac{\Delta P_{\text{GW}}}{\Delta P_{\text{schrot}}}$

spektraldichte des Rauschens bezogen auf h_+

Vorläufige Definition: ~~Spektraldichte auf h_+~~ $\rightarrow S_n$

$(\sqrt{S_n})_{\text{schrot}} := \sqrt{T} h_+ \frac{N}{S} \sim \frac{\sqrt{1 + (\omega_{\text{GW}}/\omega_p)^2}}{F L \sqrt{\omega_L P}}$

Strahlungsdruck \rightarrow Schrotrauschen an Spiegeln (ITM, ETM)

~~Mahl der reflektierten Photonen~~

\rightarrow fluktuierende Kraft auf Spiegel $\sim \sqrt{\omega_L P}$

Kraft $\sim M \ddot{x} \sim M \omega_{\text{GW}}^2 \Delta x$

\uparrow Spiegelmasse \rightarrow flukt. Spiegelposition

bezogen auf GW: $\Delta x \sim h_+ L_{\text{eff}}$ L_{eff} effektive Länge des FP

$\sim (\sqrt{S_n})_{\text{druck}} \sim \frac{F}{M L \omega_{\text{GW}}^2} \cdot \frac{\sqrt{\omega_L P}}{\sqrt{1 + (\omega_{\text{GW}}/\omega_p)^2}}$

$\sim (\sqrt{S_n})_{\text{schrot}}^{-1}$

\rightarrow man kann nicht beide Rauscharten gleichzeitig vermindern!

Unschärferelation für die Spiegel:

Man braucht viele Photonen, um die Position genau zu messen, dies erzeugt aber Fluktuationen im Impuls der Spiegel!

