

Kanonische Formulierung des Eigendrehimpulses in der Allgemeinen Relativitätstheorie

Jan Steinhoff^{1,2}

Betreuer der Dissertation: Gerhard Schäfer¹

Dissertation erstellt:



since 1558

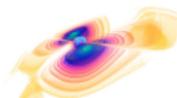
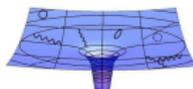
¹Theoretisch-Physikalisches Institut
Friedrich-Schiller-Universität Jena (FSU)

Seit Juni 2011:



²Centro Multidisciplinar de Astrofísica (CENTRA)
Instituto Superior Técnico (IST)

Dissertationspreissymposium, DPG Frühjahrstagung, Mainz, 20.03.2012



DFG : SFB/TR7 und GRK 1523

Wissensstand

1960

1970

1980

1990

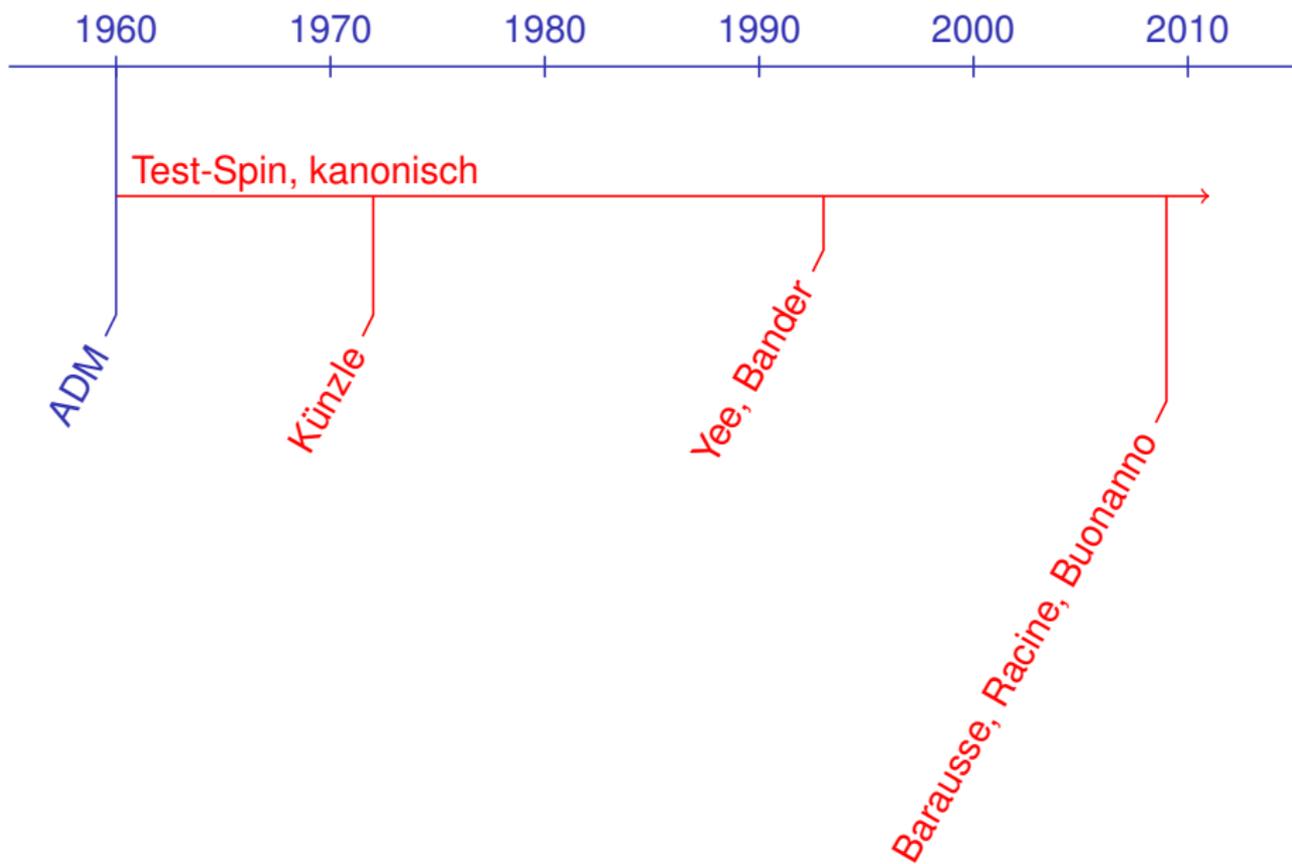
2000

2010

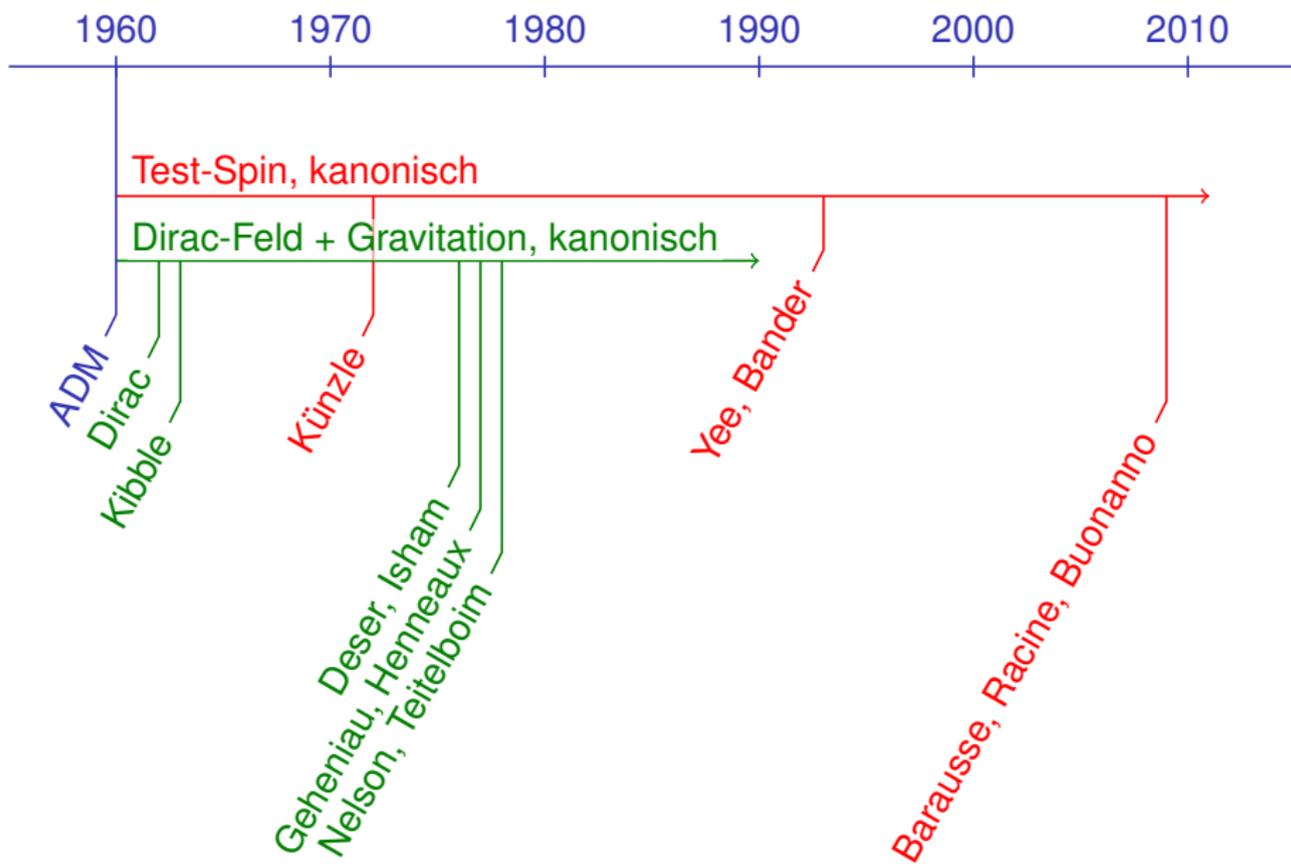
ADM

$\hat{=}$ Arnowitt, Deser, Misner

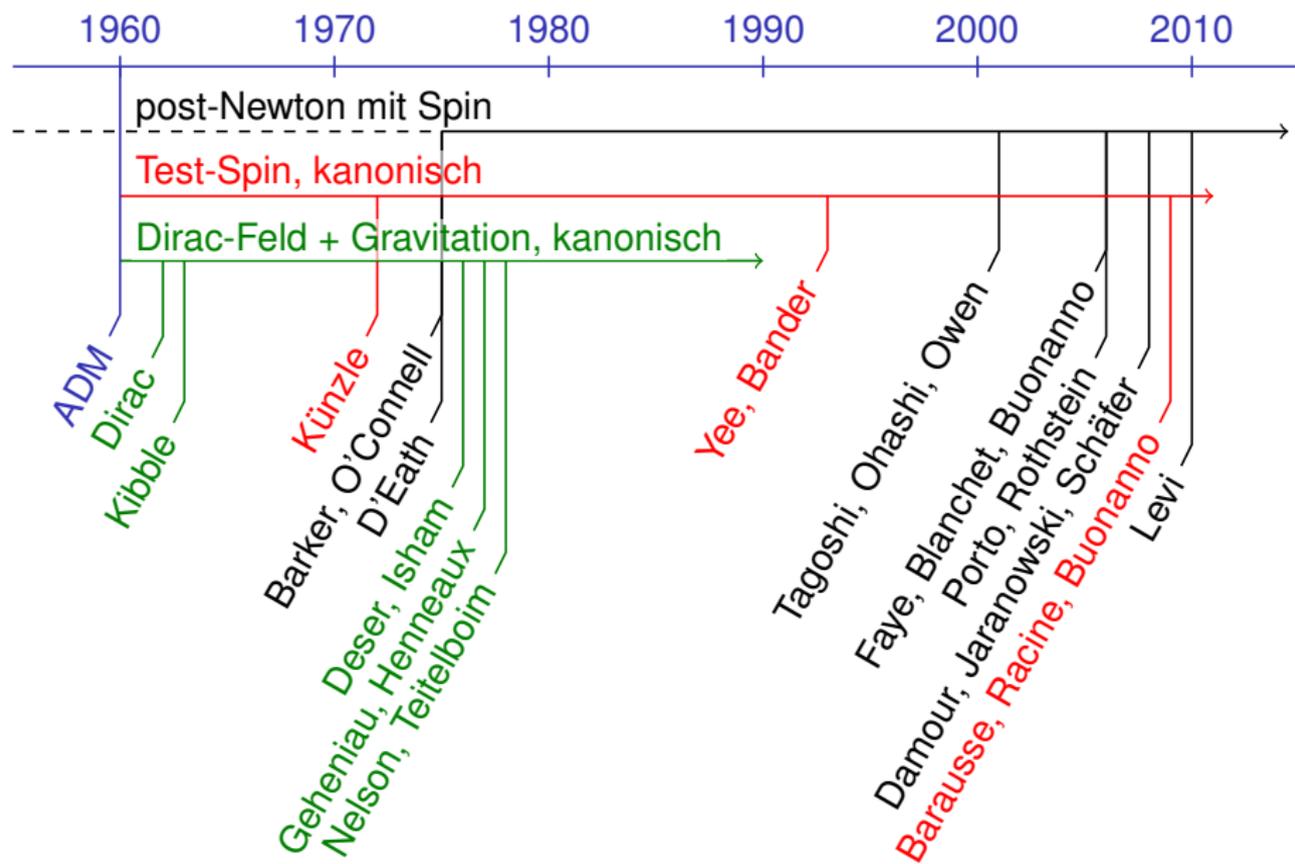
Wissensstand



Wissensstand

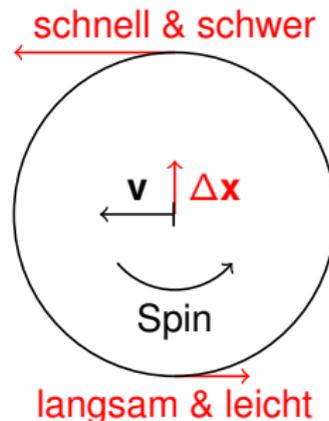


Wissensstand



Spin in der speziellen Relativitätstheorie

- Komponenten des 4-Spin $S^{\mu\nu} = -S^{\nu\mu}$:
 - 3-Spin $S^{ij} = \epsilon^{ijk} S_k$
 - Massendipol S^{i0}
- Schwerpunkt ist relativ.
- Benötigen Spin-Nebenbedingung (SNB):
 - Møller SNB: $\tilde{S}^{\mu 0} = 0$
 - Kovariante SNB: $S^{\mu\nu} p_\nu = 0$
 - **Newton-Wigner (kanonische) SNB:**
 $m\hat{S}^{\mu 0} + \hat{S}^{\mu\nu} p_\nu = 0$



Kanonische Struktur

In kovarianter SNB, Schwerpunkt z :

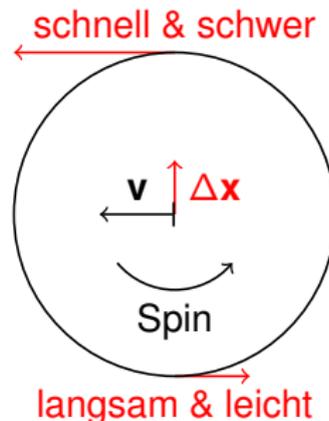
$$\{z^i, z^j\} = \frac{S^{ij}}{m^2} - \frac{p^i S^{0j} - p^j S^{0i}}{m^2 p^0}, \dots$$

In Newton-Wigner SNB:

$$\{\hat{z}^i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{\hat{S}_i, \hat{S}_j\} = \epsilon_{ijk} \hat{S}_k$$

Spin in der speziellen Relativitätstheorie

- Komponenten des 4-Spin $S^{\mu\nu} = -S^{\nu\mu}$:
 - 3-Spin $S^{ij} = \epsilon^{ijk} S_k$
 - Massendipol S^{i0}
- Schwerpunkt ist relativ.
- Benötigen Spin-Nebenbedingung (SNB):
 - Møller SNB: $\tilde{S}^{\mu 0} = 0$
 - Kovariante SNB: $S^{\mu\nu} p_\nu = 0$
 - **Newton-Wigner (kanonische) SNB:**
 $m\hat{S}^{\mu 0} + \hat{S}^{\mu\nu} p_\nu = 0$



Kanonische Struktur

In kovarianter SNB, Schwerpunkt \mathbf{z} :

$$\{z^i, z^j\} = \frac{S^{ij}}{m^2} - \frac{p^i S^{0j} - p^j S^{0i}}{m^2 p^0}, \quad \dots$$

In Newton-Wigner SNB:

$$\{\hat{z}^i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{\hat{S}_i, \hat{S}_j\} = \epsilon_{ijk} \hat{S}_k$$

Oberflächenterme und ADM Hamiltonfunktion

- Einstein–Hilbert Wirkung mit York–Gibbons–Hawking Oberflächenterm:

$$S_{\text{field}} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R - \frac{1}{16\pi G} \oint d^3y 2\sqrt{h} K$$

- ADM Energie folgt aus Oberflächenintegral

$$E_{\text{ADM}} = \frac{1}{16\pi G} \oint d^2s_i [\gamma_{ij,j} - \gamma_{jj,i}]$$

- $H^{\text{ADM}} \triangleq$ ADM Energie E_{ADM} ausgedrückt durch kanonische Variablen
- Kanonische Feldvariablen: $h_{ij}^{\text{TT}}, \pi^{ij\text{TT}}$ TT \triangleq transverse-traceless

DeWitt (1967)

“General relativity is unique among field theories in that its energy may always be expressed as a surface integral.”

Oberflächenterme und ADM Hamiltonfunktion

- Einstein–Hilbert Wirkung mit York–Gibbons–Hawking Oberflächenterm:

$$S_{\text{field}} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R - \frac{1}{16\pi G} \oint d^3y 2\sqrt{h} K$$

- ADM Energie folgt aus Oberflächenintegral

$$E_{\text{ADM}} = \frac{1}{16\pi G} \oint d^2s_i [\gamma_{ij,j} - \gamma_{jj,i}]$$

- $H^{\text{ADM}} \triangleq$ ADM Energie E_{ADM} ausgedrückt durch kanonische Variablen
- Kanonische Feldvariablen: $h_{ij}^{\text{TT}}, \pi^{ij\text{TT}}$ TT \triangleq transverse-traceless

DeWitt (1967)

“General relativity is unique among field theories in that its energy may always be expressed as a surface integral.”

Oberflächenterme und ADM Hamiltonfunktion

- Einstein–Hilbert Wirkung mit York–Gibbons–Hawking Oberflächenterm:

$$S_{\text{field}} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R - \frac{1}{16\pi G} \oint d^3y 2\sqrt{h} K$$

- ADM Energie folgt aus Oberflächenintegral

$$E_{\text{ADM}} = \frac{1}{16\pi G} \oint d^2s_i [\gamma_{ij,j} - \gamma_{jj,i}]$$

- $H^{\text{ADM}} \triangleq$ ADM Energie E_{ADM} ausgedrückt durch kanonische Variablen
- Kanonische Feldvariablen: $h_{ij}^{\text{TT}}, \pi^{ij\text{TT}}$ TT \triangleq transverse-traceless

DeWitt (1967)

“General relativity is unique among field theories in that its energy may always be expressed as a surface integral.”

Oberflächenterme und ADM Hamiltonfunktion

- Einstein–Hilbert Wirkung mit York–Gibbons–Hawking Oberflächenterm:

$$S_{\text{field}} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R - \frac{1}{16\pi G} \oint d^3y 2\sqrt{h} K$$

- ADM Energie folgt aus Oberflächenintegral

$$E_{\text{ADM}} = \frac{1}{16\pi G} \oint d^2s_i [\gamma_{ij,j} - \gamma_{jj,i}]$$

- $H^{\text{ADM}} \triangleq$ ADM Energie E_{ADM} ausgedrückt durch kanonische Variablen
- Kanonische Feldvariablen: $h_{ij}^{\text{TT}}, \pi^{ij\text{TT}}$ TT \triangleq transverse-traceless

DeWitt (1967)

“General relativity is unique among field theories in that its energy may always be expressed as a surface integral.”

Winkelgeschwindigkeit und Spin

in Newtonscher Mechanik und spezieller Relativitätstheorie (SRT), Hanson, Regge (1974)

	Newton	SRT
Körperfeste Basis	$x_{\text{Kf}}^i = \Lambda^{ij} x^j$	
Rotationsfreiheitsgrade ↪ Nebenbedingung	$\Lambda^{ki} \Lambda^{kj} = \delta_{ij}$	$\eta_{AB} \Lambda^{A\mu} \Lambda^{B\nu} = \eta^{\mu\nu}$ $\Lambda_{i\mu} p^\mu = 0$
Winkelgeschwindigkeit	$\Omega^{ij} = \Lambda^{ki} \frac{d\Lambda^{kj}}{dt}$	$\Omega^{\mu\nu} = \Lambda_A^\mu \frac{d\Lambda^{A\nu}}{d\tau}$
Spin (L : Lagrangefkt.) ↪ Nebenbedingung	$S_{ij} = 2 \frac{\partial L}{\partial \Omega^{ij}}$	$S_{\mu\nu} = 2 \frac{\partial L}{\partial \Omega^{\mu\nu}}$ $S_{i\mu} p^\mu = 0$

Anmerkung:

- Vektor der Winkelgeschwindigkeit ist $\Omega^i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \Omega^{jk}$. Analog für den Spin.

Winkelgeschwindigkeit und Spin

in Newtonscher Mechanik und spezieller Relativitätstheorie (SRT), Hanson, Regge (1974)

	Newton	SRT
Körperfeste Basis	$x_{\text{Kf}}^i = \Lambda^{ij} x^j$	
Rotationsfreiheitsgrade ↪ Nebenbedingung	$\Lambda^{ki} \Lambda^{kj} = \delta_{ij}$	$\eta_{AB} \Lambda^{A\mu} \Lambda^{B\nu} = \eta^{\mu\nu}$ $\Lambda_{i\mu} p^\mu = 0$
Winkelgeschwindigkeit	$\Omega^{ij} = \Lambda^{ki} \frac{d\Lambda^{kj}}{dt}$	$\Omega^{\mu\nu} = \Lambda_A^\mu \frac{d\Lambda^{A\nu}}{d\tau}$
Spin (L : Lagrangefkt.) ↪ Nebenbedingung	$S_{ij} = 2 \frac{\partial L}{\partial \Omega^{ij}}$	$S_{\mu\nu} = 2 \frac{\partial L}{\partial \Omega^{\mu\nu}}$ $S_{\mu\nu} p^\nu = 0$

Anmerkung:

- Vektor der Winkelgeschwindigkeit ist $\Omega^i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \Omega^{jk}$. Analog für den Spin.

Spin-Wirkung gekoppelt an Gravitation

- Minimale Kopplung (Gültig linear im Spin):

$$\Omega^{\mu\nu} = \Lambda_A^\mu \frac{D\Lambda^{A\nu}}{d\tau}$$

$$L = m \underbrace{\sqrt{-u_\mu u^\mu}}_u + \underbrace{\frac{1}{2} S_{\mu\nu} \Omega^{\mu\nu}}_{\sim \frac{1}{2} S^{ij} \partial_i A_j} + \dots \quad (\text{Gravitomagn. Feld } A_j \approx -g_{j0})$$

- Metrikvariation problematisch:

$$\Lambda_{A\mu} \Lambda^A{}_\nu = g_{\mu\nu} \quad \leftrightarrow \quad \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}$$

- Variation von Λ^{Aa} und Vierbein $e_{a\mu}$: $e_{a\mu} e^a{}_\nu = g_{\mu\nu} \quad \Lambda^A{}_\mu = \Lambda^{Aa} e_{a\mu}$

$$\Lambda_{Aa} \Lambda^A{}_b = \eta_{ab} \quad \leftrightarrow \quad \gamma_a \gamma_b + \gamma_b \gamma_a = 2\eta_{ab}$$

- Quadrupoldeformation durch nicht-minimale Kopplung: s. (Porto, Rothstein, Goldberger)

$$L_{\text{quad}} = \underbrace{\frac{1}{mu} B_{\mu\nu} S^\mu u_\alpha S^{\alpha\nu}}_{\text{erh\u00e4lt Nebenbedingung}} + \underbrace{\frac{C_{ES^2}}{2mu} E_{\mu\nu} S^\mu{}_\alpha S^{\alpha\nu}}_{\text{spininduzierte Deformation}} + \underbrace{\frac{\mu_2}{4u^3} E_{\mu\nu} E^{\mu\nu}}_{\text{Gezeitendeformation}} + \dots$$

$$E_{\mu\nu} \sim R_{\mu\alpha\nu\beta} u^\alpha u^\beta \quad B_{\mu\nu} \sim \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\rho\alpha\beta} R_{\nu\sigma}{}^{\alpha\beta} u^\rho u^\sigma \quad S^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} u_\nu S_{\alpha\beta}$$

Spin-Wirkung gekoppelt an Gravitation

- Minimale Kopplung (Gültig linear im Spin):

$$\Omega^{\mu\nu} = \Lambda_A^\mu \frac{D\Lambda^{A\nu}}{d\tau}$$

$$L = m \underbrace{\sqrt{-u_\mu u^\mu}}_u + \underbrace{\frac{1}{2} S_{\mu\nu} \Omega^{\mu\nu}}_{\sim \frac{1}{2} S^{ij} \partial_i A_j} + \dots \quad (\text{Gravitomagn. Feld } A_i \approx -g_{i0})$$

- Metrikvariation problematisch:

$$\Lambda_{A\mu} \Lambda^A{}_\nu = g_{\mu\nu} \quad \leftrightarrow \quad \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}$$

- Variation von Λ^{Aa} und Vierbein $e_{a\mu}$: $e_{a\mu} e^a{}_\nu = g_{\mu\nu} \quad \Lambda^A{}_\mu = \Lambda^{Aa} e_{a\mu}$

$$\Lambda_{Aa} \Lambda^A{}_b = \eta_{ab} \quad \leftrightarrow \quad \gamma_a \gamma_b + \gamma_b \gamma_a = 2\eta_{ab}$$

- Quadrupoldeformation durch nicht-minimale Kopplung: s. (Porto, Rothstein, Goldberger)

$$L_{\text{quad}} = \underbrace{\frac{1}{mu} B_{\mu\nu} S^\mu u_\alpha S^{\alpha\nu}}_{\text{erh\u00e4lt Nebenbedingung}} + \underbrace{\frac{C_{ES^2}}{2mu} E_{\mu\nu} S^\mu{}_\alpha S^{\alpha\nu}}_{\text{spininduzierte Deformation}} + \underbrace{\frac{\mu_2}{4u^3} E_{\mu\nu} E^{\mu\nu}}_{\text{Gezeitendeformation}} + \dots$$

$$E_{\mu\nu} \sim R_{\mu\alpha\nu\beta} u^\alpha u^\beta \quad B_{\mu\nu} \sim \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\rho\alpha\beta} R_{\nu\sigma}{}^{\alpha\beta} u^\rho u^\sigma \quad S^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} u_\nu S_{\alpha\beta}$$

Spin-Wirkung gekoppelt an Gravitation

- Minimale Kopplung (Gültig linear im Spin):

$$\Omega^{\mu\nu} = \Lambda_A^\mu \frac{D\Lambda^{A\nu}}{d\tau}$$

$$L = m \underbrace{\sqrt{-u_\mu u^\mu}}_u + \underbrace{\frac{1}{2} S_{\mu\nu} \Omega^{\mu\nu}}_{\sim \frac{1}{2} S^{ij} \partial_i A_j} + \dots \quad (\text{Gravitomagn. Feld } A_i \approx -g_{i0})$$

- Metrikvariation problematisch:

$$\Lambda_{A\mu} \Lambda^A{}_\nu = g_{\mu\nu} \quad \leftrightarrow \quad \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}$$

- Variation von Λ^{Aa} und Vierbein $e_{a\mu}$: $e_{a\mu} e^a{}_\nu = g_{\mu\nu} \quad \Lambda^A{}_\mu = \Lambda^{Aa} e_{a\mu}$

$$\Lambda_{Aa} \Lambda^A{}_b = \eta_{ab} \quad \leftrightarrow \quad \gamma_a \gamma_b + \gamma_b \gamma_a = 2\eta_{ab}$$

- Quadrupoldeformation durch nicht-minimale Kopplung: s. (Porto, Rothstein, Goldberger)

$$L_{\text{quad}} = \underbrace{\frac{1}{mu} B_{\mu\nu} S^\mu u_\alpha S^{\alpha\nu}}_{\text{erhält Nebenbedingung}} + \underbrace{\frac{G_{ES^2}}{2mu} E_{\mu\nu} S^\mu{}_\alpha S^{\alpha\nu}}_{\text{spininduzierte Deformation}} + \underbrace{\frac{\mu_2}{4u^3} E_{\mu\nu} E^{\mu\nu}}_{\text{Gezeitendeformation}} + \dots$$

$$E_{\mu\nu} \sim R_{\mu\alpha\nu\beta} u^\alpha u^\beta \quad B_{\mu\nu} \sim \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\rho\alpha\beta} R_{\nu\sigma}{}^{\alpha\beta} u^\rho u^\sigma \quad S^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} u_\nu S_{\alpha\beta}$$

Kanonische Variablen und Beispielrechnung

- Transformiere Wirkung auf die Form $S = \int dt (\hat{p}\dot{\hat{q}} - H)$
- \hat{z}^i , \hat{S}_{ij} , und $\hat{\Lambda}^{ij}$ sind "einfache" Verallgemeinerungen des SRT-Falls
- Kanonischer Impuls des Teilchens \hat{p}_i : vgl. Elektrodynamik:

$$p_i = \hat{p}_i + \frac{1}{2} \hat{S}_{kj} \Gamma^{kj}_i + \dots \quad p_i = \hat{p}_i - qA_i$$

- Kanonischer Feldimpuls $\hat{\pi}^{ijTT}$ hat **delta-Korrekturen**:

$$\pi^{ijTT} = \hat{\pi}^{ijTT} + \frac{4\pi G}{m^2} \hat{p}_m \hat{p}_k \hat{S}^{lm} \delta_{kl}^{TTij} \delta + \dots$$



Beispiel: leading-order (LO) $S_1 S_2$

$$\hat{\delta}_a = \delta(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{z}}_a), \quad \hat{r}_a = |\mathbf{x} - \hat{\mathbf{z}}_a|$$

$$\int d^3x \frac{1}{2} \hat{S}_1^{ki} \partial_k \hat{\delta}_1 \quad 16\pi G \delta_{ij} \Delta^{-1} \quad \frac{1}{2} \hat{S}_2^{lj} \partial_l \hat{\delta}_2 = \int d^3x \frac{1}{2} \hat{S}_1^{ki} \partial_k \hat{\delta}_1 \quad (-2) G \hat{S}_2^{lj} \partial_l \left(\frac{1}{\hat{r}_2} \right)$$

$$= G \hat{S}_1^{ki} \hat{S}_2^{lj} \partial_k \partial_l \left(\frac{1}{\hat{r}_1} \right) \Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{z}}_1}$$

Kanonische Variablen und Beispielrechnung

- Transformiere Wirkung auf die Form $S = \int dt (\hat{p}\dot{\hat{q}} - H)$
- \hat{z}^i , \hat{S}_{ij} , und $\hat{\Lambda}^{ij}$ sind "einfache" Verallgemeinerungen des SRT-Falls
- Kanonischer Impuls des Teilchens \hat{p}_i : vgl. Elektrodynamik:

$$p_i = \hat{p}_i + \frac{1}{2} \hat{S}_{kj} \Gamma^{kj}_i + \dots \quad p_i = \hat{p}_i - qA_i$$

- Kanonischer Feldimpuls $\hat{\pi}^{ijTT}$ hat **delta-Korrekturen**:

$$\pi^{ijTT} = \hat{\pi}^{ijTT} + \frac{4\pi G}{m^2} \hat{p}_m \hat{p}_k \hat{S}^{lm} \delta_{kl}^{TTij} \delta + \dots$$



Beispiel: leading-order (LO) S₁S₂

$$\hat{\delta}_a = \delta(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{z}}_a), \quad \hat{r}_a = |\mathbf{x} - \hat{\mathbf{z}}_a|$$

$$\int d^3x \frac{1}{2} \hat{S}_1^{ki} \partial_k \hat{\delta}_1 \quad 16\pi G \delta_{ij} \Delta^{-1} \quad \frac{1}{2} \hat{S}_2^{lj} \partial_l \hat{\delta}_2 = \int d^3x \frac{1}{2} \hat{S}_1^{ki} \partial_k \hat{\delta}_1 \quad (-2) G \hat{S}_2^{lj} \partial_l \left(\frac{1}{\hat{r}_2} \right)$$

$$= G \hat{S}_1^{ki} \hat{S}_2^{lj} \partial_k \partial_l \left(\frac{1}{\hat{r}_1} \right) \Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{z}}_1}$$

Kanonische Variablen und Beispielrechnung

- Transformiere Wirkung auf die Form $S = \int dt (\hat{p}\dot{\hat{q}} - H)$
- \hat{z}^i , \hat{S}_{ij} , und $\hat{\Lambda}^{ij}$ sind "einfache" Verallgemeinerungen des SRT-Falls
- Kanonischer Impuls des Teilchens \hat{p}_i : vgl. Elektrodynamik:

$$p_i = \hat{p}_i + \frac{1}{2} \hat{S}_{kj} \Gamma^{kj}_i + \dots \quad p_i = \hat{p}_i - qA_i$$

- Kanonischer Feldimpuls $\hat{\pi}^{ijTT}$ hat **delta-Korrekturen**:

$$\pi^{ijTT} = \hat{\pi}^{ijTT} + \frac{4\pi G}{m^2} \hat{p}_m \hat{p}_k \hat{S}^{lm} \delta_{kl}^{TTij} \delta + \dots$$



Beispiel: leading-order (LO) S₁S₂

$$\hat{\delta}_a = \delta(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{z}}_a), \quad \hat{r}_a = |\mathbf{x} - \hat{\mathbf{z}}_a|$$

$$\int d^3x \frac{1}{2} \hat{S}_1^{ki} \partial_k \hat{\delta}_1 \quad 16\pi G \delta_{ij} \Delta^{-1} \quad \frac{1}{2} \hat{S}_2^{lj} \partial_l \hat{\delta}_2 = \int d^3x \frac{1}{2} \hat{S}_1^{ki} \partial_k \hat{\delta}_1 \quad (-2) G \hat{S}_2^{lj} \partial_l \left(\frac{1}{\hat{r}_2} \right)$$

$$= G \hat{S}_1^{ki} \hat{S}_2^{lj} \partial_k \partial_l \left(\frac{1}{\hat{r}_1} \right) \Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{z}}_1}$$

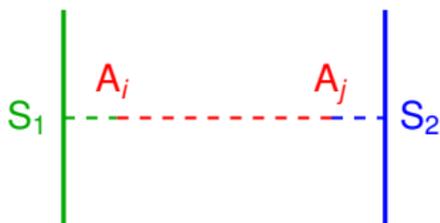
Kanonische Variablen und Beispielrechnung

- Transformiere Wirkung auf die Form $S = \int dt (\hat{p}\dot{\hat{q}} - H)$
- \hat{z}^i , \hat{S}_{ij} , und $\hat{\Lambda}^{ij}$ sind "einfache" Verallgemeinerungen des SRT-Falls
- Kanonischer Impuls des Teilchens \hat{p}_i : vgl. Elektrodynamik:

$$p_i = \hat{p}_i + \frac{1}{2} \hat{S}_{kj} \Gamma^{kj}_i + \dots \quad p_i = \hat{p}_i - qA_i$$

- Kanonischer Feldimpuls $\hat{\pi}^{ijTT}$ hat **delta-Korrekturen**:

$$\pi^{ijTT} = \hat{\pi}^{ijTT} + \frac{4\pi G}{m^2} \hat{p}_m \hat{p}_k \hat{S}^{lm} \delta_{kl}^{TTij} \delta + \dots$$



Beispiel: leading-order (LO) $S_1 S_2$

$$\hat{\delta}_a = \delta(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{z}}_a), \quad \hat{r}_a = |\mathbf{x} - \hat{\mathbf{z}}_a|$$

$$\int d^3x \frac{1}{2} \hat{S}_1^{ki} \partial_k \hat{\delta}_1 \quad 16\pi G \delta_{ij} \Delta^{-1} \quad \frac{1}{2} \hat{S}_2^{lj} \partial_l \hat{\delta}_2 = \int d^3x \frac{1}{2} \hat{S}_1^{ki} \partial_k \hat{\delta}_1 \quad (-2) G \hat{S}_2^{lj} \partial_l \left(\frac{1}{\hat{r}_2} \right)$$

$$= G \hat{S}_1^{ki} \hat{S}_2^{lj} \partial_k \partial_l \left(\frac{1}{\hat{r}_1} \right) \Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{z}}_1}$$

Alte und neue Ergebnisse für Hamiltonfunktionen

PN-Einordnung für maximalen Spin: $S = \frac{Gm^2\chi}{c}$ $\chi = 1$

order	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5
H^N								
PM	$+ H^{1PN}$		$+ H^{2PN}$	$+ H^{2.5PN}$	$+ H^{3PN}$	$+ H^{3.5PN}$	$+ H^{4PN}$	$+ H^{4.5PN}$
SO	$+ H_{SO}^{LO}$		$+ H_{SO}^{NLO}$			$+ H_{SO}^{N^2LO}$	$+ H_{SO}^{LO,R}$	$+ H_{SO}^{N^3LO}$
S_1^2		$+ H_{S_1^2}^{LO}$		$+ H_{S_1^2}^{NLO}$			$+ H_{S_1^2}^{N^2LO}$	$+ H_{S_1^2}^{LO,R}$
$S_1 S_2$		$+ H_{S_1 S_2}^{LO}$		$+ H_{S_1 S_2}^{NLO}$			$+ H_{S_1 S_2}^{N^2LO}$	$+ H_{S_1 S_2}^{LO,R}$
spin ³						$+ H_{S_3}^{LO}$		$+ H_{S_3}^{NLO}$
spin ⁴							$+ H_{S_4}^{LO}$	
⋮								⋮

H bekannt EOM bekannt für Schw. Löcher (noch) unbekannt

- Linear im Spin wurde der ADM Formalismus über einen Wirkungszugang auf rotierende Objekte erweitert.
- Vorgehen: Ausgehen von *kovarianter* Nebenbedingung, dann Transformation auf kanonische Variablen; Kopplung mittels Vierbein
- Erweiterung auf höhere Ordnungen im Spin möglich, am besten mittels einer effektiven Wirkung. $H_{S_1}^{\text{NLO}}$ wurde bestimmt.
- Neue Resultate sind $H_{S_1 S_2}^{\text{NLO}}$ und $H_{S_1}^{\text{NLO}}$. $H_{\text{SO}}^{\text{NLO}}$ wurde reproduziert.
- $H_{S_1}^{\text{NLO}}$ ist unterschiedlich für Schwarze Löcher und Neutronensterne.
- Nach Abschluss der Doktorarbeit wurde der entwickelte Formalismus zur Berechnung von $H_{\text{SO}}^{\text{N}^2\text{LO}}$, $H_{S_1 S_2}^{\text{N}^2\text{LO}}$, $H_{\text{SO}}^{\text{LO,R}}$ und $H_{S_1 S_2}^{\text{LO,R}}$ verwendet.
- Der spinabhängige Anteil von H^{ADM} ist nun bekannt bis 3PN für beliebige Binärsysteme, für Schwarze Löcher sogar bis 3.5PN.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

Anhang

Transformation auf kanonische Variablen

gültig linear im Spin

- Eichungen (vgl. Kibble 1963): $e_{(0)\mu} = n_\mu$, $(e_{(i)j}) = \sqrt{(\gamma_{ij})}$, $\tau = t$
- Materievariablen: $\hat{S}^{\mu\nu}(p_\nu + mn_\nu) = 0$

$$z^i = \hat{z}^i - \frac{nS^i}{m - np}, \quad np = -\sqrt{m^2 + \gamma^{ij}p_i p_j}$$

$$S_{ij} = \hat{S}_{ij} - \frac{p_i n S_j}{m - np} + \frac{p_j n S_i}{m - np}, \quad nS_i = -\frac{p_k \gamma^{kj} \hat{S}_{ji}}{m}$$

$$\Lambda^{[l](j)} = \hat{\Lambda}^{[l](k)} \left(\delta_{kj} + \frac{p_{(k)} p_{(j)}}{m(m - np)} \right), \quad \gamma_{ik} \gamma_{jl} A^{kl} = \frac{1}{2} \hat{S}_{ij} + \frac{mp_{(i} n S_{j)}}{np(m - np)}$$

$$p_i = \hat{p}_i - K_{ij} n S^j - A^{kl} e_{(j)k} e^{(i)l} + \left(\frac{1}{2} S_{kj} + \frac{p_{(k} n S_{j)}}{np} \right) \Gamma^{kj}_i$$

- Feldvariablen:

$$h_{ij}^{\text{TT}} = \hat{h}_{ij}^{\text{TT}}$$

$$\pi^{ij\text{TT}} = \hat{\pi}^{ij\text{TT}} - \delta_{kl}^{\text{TT}ij} (8\pi A^{(kl)} \delta + 16\pi B_{mn}^{kl} A^{[mn]}) \delta$$

$$2B_{mn}^{kl} \equiv e^{(i)}_m \frac{\partial e_{(i)n}}{\partial \gamma_{kl}} - e^{(i)}_n \frac{\partial e_{(i)m}}{\partial \gamma_{kl}}, \quad \delta_{kl}^{\text{TT}ij} \equiv \text{TT-Projektor}$$

Results for Spin Hamiltonians

shown for equal masses, circular orbits, and aligned spins

$$H_{\text{spin}} = H_{S_1 O} + H_{S_2 O} + H_{S_1^2} + H_{S_2^2} + H_{S_1 S_2} + H_{S^3} + H_{S^4} + \dots$$

LO

NLO

N²LO

$$H_{S_1 O} = S_1 L \left\{ \frac{7}{8r^3} + \frac{3}{r^4} \left[-1 + \frac{5}{16} \frac{L^2}{r} \right] + \frac{1}{64r^5} \left[401 - \frac{751}{8} \frac{L^2}{r} - \frac{25}{16} \frac{L^4}{r^2} \right] + \dots \right\}$$

$$H_{S_1^2} = S_1^2 \left\{ -\frac{C_{ES^2}}{8r^3} + \frac{1}{16r^4} \left[6C_{ES^2} + 5 - \frac{17C_{ES^2} - 11}{4} \frac{L^2}{r} \right] + \dots \right\}$$

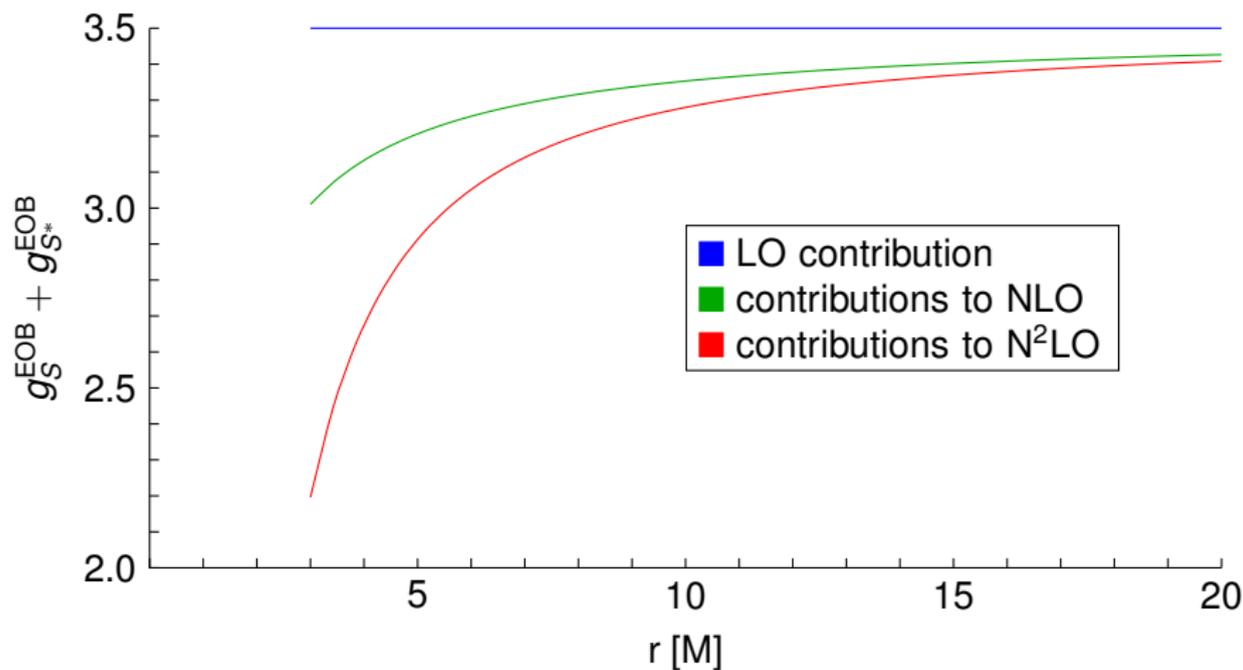
$$H_{S_1 S_2} = S_1 S_2 \left\{ -\frac{1}{4r^3} + \frac{1}{2r^4} \left[3 - \frac{7}{8} \frac{L^2}{r} \right] + \frac{1}{64r^5} \left[-271 - 238 \frac{L^2}{r} + \frac{45}{8} \frac{L^4}{r^2} \right] + \dots \right\}$$

$$H_{S^3} = \frac{5L}{64r^5} (S_1 + S_2)^3 + \dots \quad \text{yet only known}$$

$$H_{S^4} = -\frac{3}{128r^5} (S_1 + S_2)^4 + \dots \quad \text{for black holes}$$

Spin-Orbit: Gyro-Gravitomagnetic Ratios $g_S^{\text{EOB}} + g_{S^*}^{\text{EOB}}$

for equal masses and circular orbits, A. Nagar arXiv:1106.4349



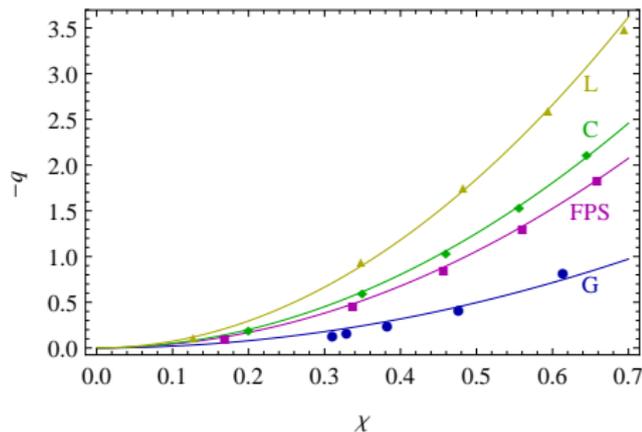
Quadrupole Deformation due to Spin

for neutron stars, Laarakkers, Poisson gr-qc/9709033

- Here $m = 1.4M_{\odot}$
- Dim.-less mass quadrupole: q
- Dim.-less spin: χ
- Quadratic fit is extremely good:

$$-q \approx C_{ES^2} \chi^2$$

- $C_{ES^2} = 4.3 \dots 7.4$, EOS dependent
- Also depends on mass



see Laarakkers, Poisson gr-qc/9709033

- For black holes $C_{ES^2} = 1$
- S^4 -quadrupole is highly suppressed
- RNS code by N. Stergioulas publicly available

NLO Spin-Bahn (SO)

Siehe auch Tagoshi, Ohashi, Owen (2001), sowie Faye, Blanchet, Buonanno (2006).
Hamiltonfunktion zuerst in Damour, Jaranowski, Schäfer (2008).

$$\begin{aligned} H_{\text{SB}}^{\text{NLO}} = & -\frac{((\hat{\mathbf{p}}_1 \times \hat{\mathbf{S}}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})}{\hat{r}_{12}^2} \left[\frac{5m_2 \hat{\mathbf{p}}_1^2}{8m_1^3} + \frac{3(\hat{\mathbf{p}}_1 \cdot \hat{\mathbf{p}}_2)}{4m_1^2} - \frac{3\hat{\mathbf{p}}_2^2}{4m_1 m_2} \right. \\ & \left. + \frac{3(\hat{\mathbf{p}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})(\hat{\mathbf{p}}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})}{4m_1^2} + \frac{3(\hat{\mathbf{p}}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})^2}{2m_1 m_2} \right] \\ & + \frac{((\hat{\mathbf{p}}_2 \times \hat{\mathbf{S}}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})}{\hat{r}_{12}^2} \left[\frac{(\hat{\mathbf{p}}_1 \cdot \hat{\mathbf{p}}_2)}{m_1 m_2} + \frac{3(\hat{\mathbf{p}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})(\hat{\mathbf{p}}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})}{m_1 m_2} \right] \\ & + \frac{((\hat{\mathbf{p}}_1 \times \hat{\mathbf{S}}_1) \cdot \hat{\mathbf{p}}_2)}{\hat{r}_{12}^2} \left[\frac{2(\hat{\mathbf{p}}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})}{m_1 m_2} - \frac{3(\hat{\mathbf{p}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})}{4m_1^2} \right] \\ & - \frac{((\hat{\mathbf{p}}_1 \times \hat{\mathbf{S}}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})}{\hat{r}_{12}^3} \left[\frac{11m_2}{2} + \frac{5m_2^2}{m_1} \right] \\ & + \frac{((\hat{\mathbf{p}}_2 \times \hat{\mathbf{S}}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})}{\hat{r}_{12}^3} \left[6m_1 + \frac{15m_2}{2} \right] + (1 \leftrightarrow 2) \end{aligned}$$

NLO Spin₁-Spin₂

Teilresultat in Porto, Rothstein (2006).

$$\begin{aligned} H_{S_1 S_2}^{\text{NLO}} = & \frac{1}{2m_1 m_2 \hat{r}_{12}^3} \left[\frac{3}{2} ((\hat{\mathbf{p}}_1 \times \hat{\mathbf{S}}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12}) ((\hat{\mathbf{p}}_2 \times \hat{\mathbf{S}}_2) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12}) + \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2) (\hat{\mathbf{p}}_1 \cdot \hat{\mathbf{p}}_2) \right. \\ & + 6 ((\hat{\mathbf{p}}_2 \times \hat{\mathbf{S}}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12}) ((\hat{\mathbf{p}}_1 \times \hat{\mathbf{S}}_2) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12}) - \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{p}}_2) (\hat{\mathbf{S}}_2 \cdot \hat{\mathbf{p}}_1) \\ & - 15 (\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12}) (\hat{\mathbf{S}}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12}) (\hat{\mathbf{p}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12}) (\hat{\mathbf{p}}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12}) + (\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{p}}_1) (\hat{\mathbf{S}}_2 \cdot \hat{\mathbf{p}}_2) \\ & - 3 (\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12}) (\hat{\mathbf{S}}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12}) (\hat{\mathbf{p}}_1 \cdot \hat{\mathbf{p}}_2) + 3 (\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{p}}_2) (\hat{\mathbf{S}}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12}) (\hat{\mathbf{p}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12}) \\ & + 3 (\hat{\mathbf{S}}_2 \cdot \hat{\mathbf{p}}_1) (\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12}) (\hat{\mathbf{p}}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12}) + 3 (\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{p}}_1) (\hat{\mathbf{S}}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12}) (\hat{\mathbf{p}}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12}) \\ & \left. + 3 (\hat{\mathbf{S}}_2 \cdot \hat{\mathbf{p}}_2) (\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12}) (\hat{\mathbf{p}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12}) - 3 (\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2) (\hat{\mathbf{p}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12}) (\hat{\mathbf{p}}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12}) \right] \\ & + \frac{3}{2m_1^2 \hat{r}_{12}^3} \left[-((\hat{\mathbf{p}}_1 \times \hat{\mathbf{S}}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12}) ((\hat{\mathbf{p}}_1 \times \hat{\mathbf{S}}_2) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12}) \right. \\ & \left. + (\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2) (\hat{\mathbf{p}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})^2 - (\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12}) (\hat{\mathbf{S}}_2 \cdot \hat{\mathbf{p}}_1) (\hat{\mathbf{p}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12}) \right] \\ & + \frac{3}{2m_2^2 \hat{r}_{12}^3} \left[-((\hat{\mathbf{p}}_2 \times \hat{\mathbf{S}}_2) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12}) ((\hat{\mathbf{p}}_2 \times \hat{\mathbf{S}}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12}) \right. \\ & \left. + (\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2) (\hat{\mathbf{p}}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})^2 - (\hat{\mathbf{S}}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12}) (\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{p}}_2) (\hat{\mathbf{p}}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12}) \right] \\ & + \frac{6(m_1 + m_2)}{\hat{r}_{12}^4} \left[(\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2) - 2(\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12}) (\hat{\mathbf{S}}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12}) \right] \end{aligned}$$

NLO Spin₁-Spin₁

Siehe auch Porto, Rothstein (2008).

$$\begin{aligned} H_{S_1^2}^{\text{NLO}} = & \frac{m_2}{m_1^3 \hat{r}_{12}^3} \left[\left(\frac{15}{4} - \frac{9}{2} C_Q \right) (\hat{\mathbf{p}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})(\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})(\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{p}}_1) + \left(\frac{5}{4} - \frac{5}{4} C_Q \right) \hat{\mathbf{p}}_1^2 \hat{\mathbf{S}}_1^2 \right. \\ & + \left(-\frac{9}{8} + \frac{3}{2} C_Q \right) (\hat{\mathbf{p}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})^2 \hat{\mathbf{S}}_1^2 + \left(-\frac{21}{8} + \frac{9}{4} C_Q \right) \hat{\mathbf{p}}_1^2 (\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})^2 \\ & + \left(-\frac{5}{4} + \frac{3}{2} C_Q \right) (\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{p}}_1)^2 \left. \right] + \frac{C_Q}{m_1 m_2 \hat{r}_{12}^3} \left[\frac{9}{4} \hat{\mathbf{p}}_2^2 (\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})^2 - \frac{3}{4} \hat{\mathbf{p}}_2^2 \hat{\mathbf{S}}_1^2 \right] \\ & + \frac{1}{m_1^2 \hat{r}_{12}^3} \left[\left(-\frac{3}{2} + \frac{9}{2} C_Q \right) (\hat{\mathbf{p}}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})(\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})(\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{p}}_1) \right. \\ & + \left(-3 + \frac{3}{2} C_Q \right) (\hat{\mathbf{p}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})(\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})(\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{p}}_2) + \left(-\frac{3}{2} + \frac{9}{4} C_Q \right) (\hat{\mathbf{p}}_1 \cdot \hat{\mathbf{p}}_2) \hat{\mathbf{S}}_1^2 \\ & + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4} C_Q \right) (\hat{\mathbf{p}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})(\hat{\mathbf{p}}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12}) \hat{\mathbf{S}}_1^2 + \left(3 - \frac{21}{4} C_Q \right) (\hat{\mathbf{p}}_1 \cdot \hat{\mathbf{p}}_2) (\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})^2 \\ & \left. - \frac{15}{4} C_Q (\hat{\mathbf{p}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})(\hat{\mathbf{p}}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})(\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} C_Q \right) (\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{p}}_1)(\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{p}}_2) \right] \\ & + \frac{m_2}{\hat{r}_{12}^4} \left[\left(2 + \frac{1}{2} C_Q \right) \hat{\mathbf{S}}_1^2 - \left(3 + \frac{3}{2} C_Q \right) (\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})^2 \right] \\ & + \frac{m_2^2}{m_1 \hat{r}_{12}^4} \left[(1 + 2C_Q) \hat{\mathbf{S}}_1^2 - (1 + 6C_Q) (\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12})^2 \right] \end{aligned}$$